Capitolo 2

Commutazione

2.1 Ottimizzazione di matrici di commutazione tristadio

Sia data una matrice di commutazione spaziale con N linee in ingresso; si vuole progettare la matrice di commutazione a costo minimo prendendo in esame sia la soluzione monostadio che quella tristadio.
Il costo della matrice monostadio è:

$$C_1 = N^2 \tag{2.1}$$

il costo della matrice tristadio non bloccante è:

$$C_3 = N\,(2n-1)\left(2 + N/n^2\right) \tag{2.2}$$

dove n rappresenta il numero di linee in ingresso a ciascuna delle matrici S del primo stadio. Ovviamente si deve avere che:

$$N/n \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

Ovviamente il costo della matrice tristadio è dipendente da n, per cui è necessario scegliere un n che minimizzi il costo. Si osservi che:

$$\lim_{n\to-\infty} C_3 = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} C_3 = \infty.$$

Derivando l'equazione (2.2) si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}C_3}{\mathrm{d}n} = 4N - 2N^2/n^2 + 2N^2/n^3 \tag{2.4}$$

A noi interessano i punti in cui la $\frac{\mathrm{d}C_3}{\mathrm{d}n}$ è nulla (se esistono). Chiaramente $n = 0$ non è soluzione della derivata, per cui senza perdita di generalità si possono cercare le soluzione della:

$$2Nn^3\frac{\mathrm{d}C_3}{\mathrm{d}n} = 2n^3 - Nn + N \tag{2.5}$$

Questa è un'equazione di terzo grado, quindi con tre soluzioni. Perché ci sia un minimo locale (e conseguentemente un massimo locale) nell'equazione (2.2) si devono avere almeno due radici reali positive non coincidenti, quindi, come evidenziato nella sezione 2.1.1, si deve avere $N > 14$. Si noti come l'equazione (2.2) presenti un asintoto negativo per $n = 0$, per cui la presenza di tre soluzioni nella derivata non è una sorpresa.
La soluzione che porta al minimo locale dell'equazione di costo è dato dalla più grande tra le soluzioni della (2.5). Per $2N^2/n^3 \ll 2N^2/n^2$, ossia quando $2n \gg 1$ nella (2.2), si può trascurare l'ultimo termine nell'equazione (2.4), che porta all'approssimazione della soluzione cercata, cioè $\sqrt{N/2}$.

2.1.1 Soluzione dell'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Posto:

$$p = -\frac{d}{2a} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} \tag{2.6}$$

$$q = \sqrt{-\frac{bcd}{6a^3} + \frac{d^2}{4a^2} + \frac{c^3}{27a^3} + \frac{b^3d}{27a^4} - \frac{b^2c^2}{108a^4}} \tag{2.7}$$

$$w = \sqrt[3]{p+q} \tag{2.8}$$

$$z = \sqrt[3]{p-q} \tag{2.9}$$

si hanno le seguenti soluzioni:

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + w + z \tag{2.10}$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} - \frac{1}{2}\left\{(w+z) + i\sqrt{3}\,(w-z)\right\} \tag{2.11}$$

$$x_3 = -\frac{b}{3a} - \frac{1}{2}\left\{(w+z) - i\sqrt{3}\,(w-z)\right\} \tag{2.12}$$

$$\tag{2.13}$$

Nel caso dell'equazione

$$2x^3 - Nx - N = 0 \tag{2.14}$$

le soluzioni si semplificano nelle seguenti:

$$p = \frac{N}{4} \qquad\qquad w = \sqrt[3]{p+q}$$
$$q = \sqrt{\frac{N^2}{16} - \frac{N^3}{27 \cdot 8}} \qquad\qquad z = \sqrt[3]{p-q}$$

$$x_1 = +w + z$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}\left\{(w+z) + i\sqrt{3}\,(w-z)\right\}$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}\left\{(w+z) - i\sqrt{3}\,(w-z)\right\}$$

Per la continuità delle radici al variare dei coefficienti dell'equazione, il punto in cui le due radici complesse diventano reali è caratterizzato dalla presenza di due radici reali coincidenti. Appare evidente come questa condizione si verifichi per $(w - z)$ nullo, ovvero se e solo se q è nullo, inoltre è facile verificare che per $\lim_{N=\infty}$ si hanno tre radici reali. Per avere che le 2 radici coincidenti è quindi necessario che

$$\frac{N^2}{16} - \frac{N^3}{27 \cdot 8} = 0$$
$$N = \frac{27}{2} = 13.5$$

e quindi per avere due radici reali positive disgiunte occorre che $N > 13.5$

2.2 Ottimizzazione di matrici di commutazione pentastadio

Le matrici di commutazione pentastadio si possono ottenere sostituendo a ciascuno dei blocchi interni di una tristadio la corrispondente implementazione tristadio.
Il costo della pentastadio non bloccante (si rispetta la condizione di Clos) è pari a:

$$C_5 = N\,(2n-1)\left(2 + \frac{2l-1}{n}\left(2 + \frac{N}{nl^2}\right)\right) \tag{2.15}$$

dove N è il numero delle linee di ingresso, n è il numero di linee in ingresso ad ogni blocco del primo stadio e l è il numero delle linee di ingresso ad ogni blocco del terzo stadio. Si noti come sia necessario che:

$$N/n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad N/(nl) \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Lo studio relativo all'esistenza del minimo per tale costo è simile a quello svolto per il caso di matrici tristadio, ma le derivate coinvolte sono parziali e il sistema da risolvere è in due incognite. Si ottengono una serie di soluzioni, che evidenziano la presenza di una serie di minimi locali nella funzione di costo, ma la cui individuazione comporta la risoluzione di un'equazione di ottavo grado (fattibile solo in forma numerica). Assumendo però che:

$$2n \gg 1 \qquad \text{e} \qquad 2l \gg 1$$

le derivate si semplificano in maniera considerevole e si ottiene la seguente stima:

$$n = \sqrt[3]{N/2} \qquad l = \frac{n}{2}.$$

Occorre quindi notare come non sia vero che l'ottimizzazione di una struttura di commutazione S sia svolgibile in passi successivi, ovvero come il procedimento di costruzione di una pentastadio dalla tristadio a costo minimo, non porti necessariamente ad una pentastadio a costo minimo.
A titolo di esempio consideriamo una struttura quadrata con 2^{20} ingressi; si ottengono i seguenti risultati:

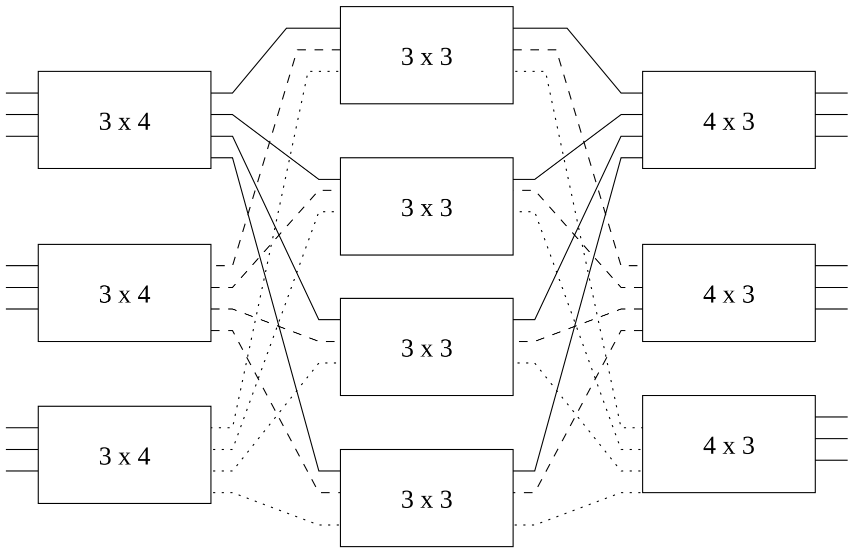
$$\begin{array}{lrll}
C_1 = & 1099511627776 & & \\
C_3 = & 6436159488 & n = 512 & \\
C_5 = & 2673352704 & n = 512 & l = 32 \\
C_5 = & 1595965440 & n = 128 & l = 64
\end{array}$$

si osservi come l'approssimazione precedentemente illustrata avrebbe fornito come candidato il punto $n = 80.6, l = 40.3$, e come in tale punto l'approssimazione del costo porti ad un errore dell'1.67%, mentre nel punto $n = 128, l = 64$ l'approssimazione sia circa lo 0.92%.

2.3 Esercizi Matrici Tristadio

Esercizio 2.1. *Riferendosi alla rete di commutazione S-S-S 9×9 indicata in figura, dire se è bloccante o no. Nel caso che tale struttura risulti bloccante individuare:*

- *un esempio di situazione di blocco (congestione interna);*
- *la probabilità di blocco secondo l'approssimazione di Lee ipotizzando che ogni linea in ingresso sia occupata con probabilità* $a = 0.7$*;*
- *individuare le modifiche da apportare per rendere la struttura a 3 stadi non bloccante; valutare il costo della struttura così ottenuta e confrontarlo con quello della struttura mono-stadio ad accessibilità completa.*



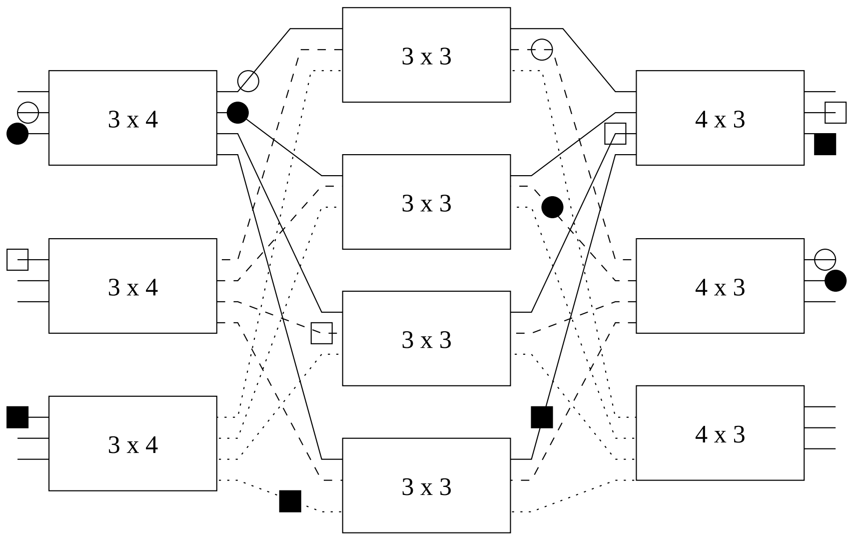
Soluzione.

1. La condizione di Clos prevede che affinché la struttura 3-stadio risulti non bloccante, il numero di stadi intermedi k sia pari o superiore a $2n - 1$ dove n è il numero di linee in ingresso ad ognuno degli stadi iniziali.

   Nel problema in esame si ha che $n = 3$, quindi $k \geq 5$, ma si hanno solo 4 stadi intermedi, quindi la struttura è bloccante.

   Si può notare come, essendo $k = 4$, il caso preso in esame sia analogo al worst case analizzato nella dimostrazione della condizione di Clos. In particolare si ha blocco su una linea se tutte le $n - 1$ linee rimanenti del proprio blocco impegnano $n - 1$ stadi intermedi e i rimanenti $n - 1$ sono impegnati da comunicazioni provenienti da altri blocchi del primo stadio e dirette verso il blocco del terzo stadio che contiene la linea richiesta dalla chiamata bloccata.

In figura è riportato un esempio in cui è impossibile connettere la linea di ingresso 1 del blocco 1 con la linea 1 del blocco 1 in uscita.



2. Secondo l'approssimazione di Lee la probabilità di blocco è pari a:

$$P_{\text{blocco}} = \left(1 - (1-p)^2\right)^k \qquad \text{dove} \qquad p = \frac{na}{k}$$

Si ha quindi che $p = 0.525$ e $P_{\text{blocco}} = 0.35959$

3. In seguito alle considerazioni precedentemente fatte risulta chiaro che l'assenza di blocco si raggiunge semplicemente aumentando di una unità il numero di blocchi intermedi e sostituendo ad ognuno dei blocchi 3x4 del primo e terzo stadio con analoghi blocchi 3x5, oltre naturalmente alle dovute interconnessioni.

   Il costo di una struttura 3 stadi bloccante sarà pari a:

$$C_{\text{bloccante}} = 2Nk + \frac{N^2}{n^2}k = Nk(2 + \frac{N}{n^2}) = 108$$

   Il costo di una struttura 3 stadi non bloccante sarà pari a:

$$C_{\text{non bloccante}} = 135$$

   Il costo della struttura mono-stadio sarebbe stato:

$$C_{\text{monostadio}} = N^2 = 81$$

Si nota quindi come in questo caso la struttura tristadio porta ad un costo superiore.

È dimostrabile che le strutture tristadio diventano convenienti per un numero di linee in ingresso superiore a 14.

□

Esercizio 2.2. *Progettare un commutatore T-S-T di dimensioni* 2048×2048 *con la massima probabilità di blocco accettabile pari a 0.002 (si usi l'approccio teorico di Lee) ammettendo che l'utilizzazione delle linee in ingresso sia 0.9/linea (e cioè che la probabilità di occupato per linea sia del 90%)*

- *Quale sarebbe il numero di punti di incrocio per l'equivalente rete S-S-S ?*
- *Progettare la rete S-S-S non bloccante a costo minimo e confrontare il costo con quello della rete precedente.*

Riferendoci alla struttura T-S-T originaria:

- *Qual è il "tempo di accesso" richiesto per le matrici T del I e del III stadio?*
- *Valutare la "rapidità di commutazione" con cui la matrice S del secondo stadio deve riadattare i propri collegamenti all'inizio di ogni nuovo slot (si assuma che ogni linea di ingresso al commutatore porti un flusso TDM-PCM con* T_{frame} *di* $125\mu s$ *e che i pacchetti trasmessi in uno slot siano lunghi 8 bit - caso della telefonia numerica).*

Soluzione.
Non è possibile progettare un commutatore bloccante a costo minimo in maniera diretta, quindi si procede in maniera iterativa a partire dal corrispondente commutatore non bloccante.
In base all'analisi di Clos si ha che n ottimale è pari a $\sqrt{N/2}$, quindi $n = 32$. Per rispettare la condizione di Clos si dovrebbe avere $k = 2n - 1 = 63$; per la validità della formula di Lee si deve avere che $k \geq n$, quindi si deve cercare un $k \in [32, 63)$.
Tramite prove successive si arriva a determinare che per $k = 45$ si ha che la P_{blocco} è pari a 0.0019, che rispetta le specifiche di progetto minimizzando il costo per un dato valore di n (si noti che non è detto che un diverso valore di n non possa portare ad una struttura bloccante a costo minore).
Il numero di punti di incrocio (il costo) della struttura S-S-S corrispondente sarebbe pari a:

$$C_{\text{bloccante}} = Nk(2 + \frac{N}{n^2}) = 368640$$

mentre per la struttura non bloccante (in cui $k = 63$) il costo sarebbe:

$$C_{\text{non bloccante}} = 516096$$

Per ciò che concerne il tempo di accesso delle matrici T del I e del III stadio si deve avere che:

$$T_{\text{accesso}} \leq \frac{T_{\text{frame}}}{2N}$$

dove N è pari al maggiore tra n e k.
Si ha quindi che $T_{\text{accesso}} \leq 1.3\overline{8}\mu s$.
La rapidità di commutazione delle matrici del II stadio deve essere inferiore ad un tempo di bit, che nel caso in esame è pari a $(T_{\text{frame}}/k)/8 = 347.2ns$

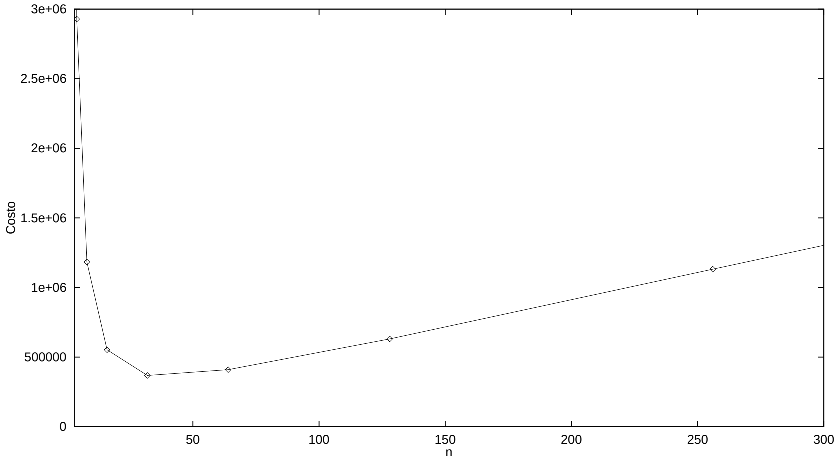
□

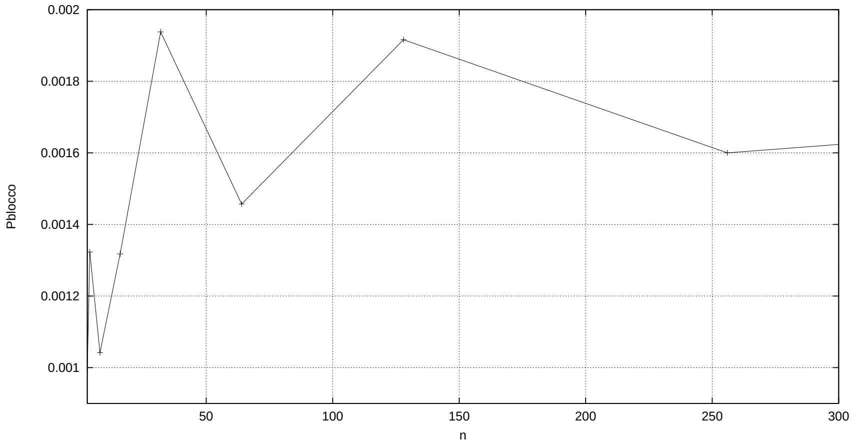
Si noti che la struttura bloccante realizzata non detto che sia quella a costo minimo, ma solo una genericamente a costo basso. Effettuando una serie di prove (non richieste nell'esercizio) sarebbe stato possibile determinare che la struttura trovata è effettivamente a costo minimo.
Per trovare ogni possibile combinazione di n e k è possibile utilizzare un semplice programma iterativo come quello sotto riportato.

Algorithm 1 Programma per il calcolo di una struttura bloccante a costo minimo

```
N ← 2048 {sostituire il valore di N (numero di linee in ingresso)}
a ← 0.9 {sostituire il valore di a (probabilità di linea occupata)}
P_target ← 0.002 {sostituire il valore di Pblocco massima}
for n = 2 to n < N do
  if N è divisibile per n then
    k ← n
    P_b ← (1 − (1 − na/k)^2)^k
    while P_b > P_target do
      k ← k + 1
      P_b ← (1 − (1 − na/k)^2)^k
    end while
  end if
  Costo ← Nk(2 + N/n^2)
  Stampa n, k, P_b, Costo
end for
```

I risultati sono riportati nella figure sottostanti, dove si nota la presenza di un minimo per il costo per $n = 32$.

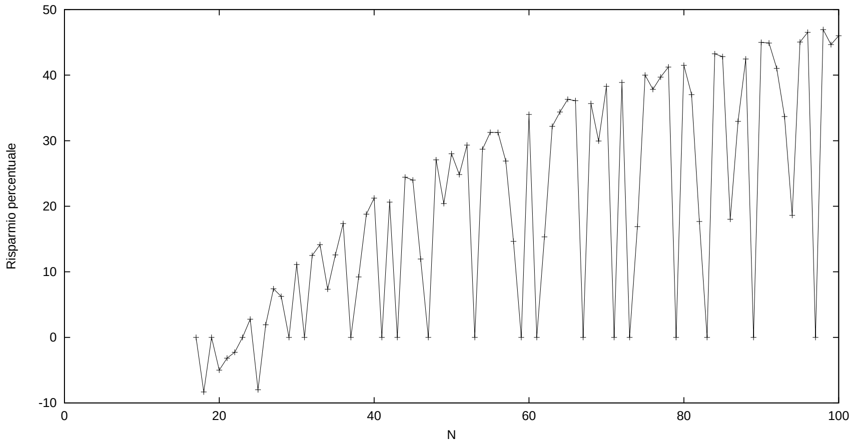


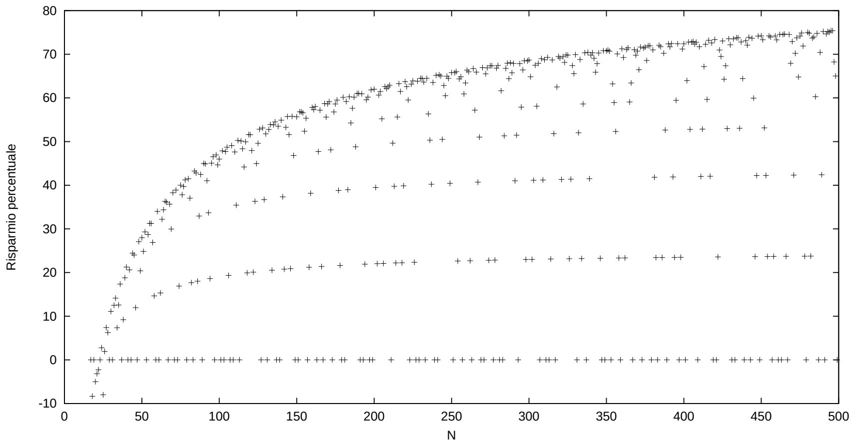


Di seguito sono invece riportati, per strutture non bloccanti, i risultati del risparmio percentuale sul costo della struttura di commutazione, definito come

$$R_{\%} = 100 \cdot \left(1 - \frac{C_{\mathrm{tristadio}}}{C_{\mathrm{monostadio}}}\right)$$

si notino che per determinati valori di N si ha un risparmio minimo o nullo. Questo fenomeno è dovuto a valori di N primi o 'poco divisibili'.





Esercizio 2.3. *Si consideri una rete T-S-S-S-T di 116736x116736 così strutturata:*

- *al I stadio si hanno 256 TSI con 456 slot per frame in ingresso e 512 slot per frame in uscita;*
- *le matrici S del II e del IV stadio sono 16x16 ($n = k$);*

Domande:

a) *Quali sono le dimensioni delle matrici del III stadio? Mostrare che sono richiesti 12888 punti di incrocio.*

b) *Se la probabilità di blocco per linee di ingresso è del 90%, verificare che secondo l'approccio di Lee la probabilità di blocco è* $6.4 \cdot 10^{-5}$.

c) *Nel tempo di uno slot sono trasmessi 8 bit e la durata di un frame è 125μs. Mostrare che il tempo di commutazione della matrice spaziale deve essere inferiore a 30.5 ns(=tempo per trasmettere un bit del flusso TDM-PCM di ingresso).*

d) Mostrare che il tempo di accesso *richiesto per le matrici T è 122 ns.*

e) Ogni quanto tempo la matrice di commutazione spaziale aggiorna le proprie connessioni?

Soluzione.

a) 16 matrici 16x16

b) Tale punto dell'esercizio non è risolubile (N.d.E.: da voi!!!!) in quanto a lezione non viene fatta la probabilità di blocco per pentastadio. Quello che si può fare però in certi casi è vedere se il tre blocchi interni sono non bloccanti; in questo caso è possibile rifarsi alla probabilità di blocco per una tristadio.

c) $T_c = \frac{T_{\text{frame}}}{512 \cdot 8}$

d) $T_a = \frac{T_{\text{frame}}}{2 \cdot 512}$

e) $T_c = \frac{T_{\text{frame}}}{512}$

□

Esercizio 2.4 (A.A. 1993/94)**.**
Progettare una rete di connessione non bloccante S-S-S a costo minimo in grado di interconnettere 32000 canali in ingresso con altrettanti canali in uscita. Indicare il procedimento mediante il quale è possibile ridurre il costo della struttura progettata supponendo di accettare una fissata probabilità di blocco per un fissato *carico per linea in ingresso.*

Soluzione.
$\sqrt{\frac{N}{2}} = 126,5$. Si considera i due casi $n_1 = 125$ e $n_2 = 128$. Per avere la rete non bloccante si ha che

$$k_1 = 249 \text{ e } k_2 = 255$$

Il costo nei due casi è pari a:

$$C_1 = 32254464 \; C_2 = 32257500$$

La rete a costo minimo è pertanto quella con $n = 125$ □

Esercizio 2.5 (A.A. 1995/96)**.**

a) Descrivere brevemente una rete di connessione T-S evidenziando la condizione di blocco.

b) Dimensionare una struttura di commutazione T-S-T con 1000 ingressi/uscite (suddivisi in 10 gruppi) in maniera da garantire una probabilità di blocco nulla.

Soluzione.

a) canale 1 linea 5 $\rightarrow$ canale 2 linea 4;
   canale 3 linea 5 $\rightarrow$ canale 2 linea 2

b) n=100 e k=199.

□

Esercizio 2.6 (A.A. 1997/98).

a) Si dimensioni un autocommutatore con struttura T-S-T in maniera che risulti non bloccante per gestire complessivamente 10000 canali ingresso/uscita suddivisi in 500 gruppi di uguale consistenza.

b) Si valuti la riduzione di costo possibile con una struttura a cinque stadi.

c) Assumendo una probabilità di occupazione di ogni canale in ingresso pari a 0.6, valutare la probabilità di blocco risultante quando il numero di canali per trama (uscita blocchi dei primo stadio) sia ridotto del 40%.

Soluzione.
Si hanno 10000 canali in ingresso divisi in gruppi di 500, pertanto il numero di canali in ingresso a ciascuna struttura T del primo stadio sarà pari a $n = 10000/500 = 20$.
Perché la struttura risultante sia non bloccante occorre che sia rispettata la condizione di Clos, quindi si avrà che $k = 2n - 1 = 39$.
Si avranno quindi 500 strutture T 20-39 nel primo stadio, una matrice S 500x500 per lo stadio centrale e 500 strutture T 39-20 per il terzo stadio.
Utilizzando una struttura a cinque stadi T-S-S-S-T si è in grado di abbattere il costo della struttura centrale.
Per calcolare la struttura a costo minimo è necessario scegliere opportunamente n e k.

$$n = \sqrt{N/2} = 15.8$$

Dal momento che N/n deve essere una quantità intera è necessario scegliere opportunamente n. Si prendono in considerazione due valori: $n = 10$ e $n = 20$; dovendo rispettare la condizione di Clos si avrà in ogni caso che $k = 2n - 1$.
Applicando la formula per il costo delle matrici S tristadio si ricava:

$$C_{10} = Nk(2 + N/n^2) = 66500$$
$$C_{20} = 63375$$

pertanto si sceglie la soluzione con $n = 20$ e $k = 39$. Il costo della matrice monostadio sarebbe stato

$$C_{\text{mono}} = N^2 = 250000$$

La riduzione percentuale di costo è:

$$\text{Rid} = 100(1 - C_{20}/C_{\text{mono}}) = 74.65\%$$

Applicando una riduzione del 40% delle linee di uscita del primo stadio (nel sistema T-S-T) si avrebbe che ognuna delle strutture T diventerebbe una 20-23 o una 20-24, infatti $39 \cdot 0.6 = 23.4$, quindi vanno vagliate tutte e due le soluzioni. (Si ricordi che $a = 0.6$ è un dato del problema.)
Applicando la formula di Lee

$$P_{\text{blocco}} = \left(1 - (1-p)^2\right)^k \qquad \text{dove} \qquad p = \frac{na}{k}$$

si ottiene che

$$P_{\text{blocco}} = \begin{cases} 0.002524 & k = 23 \\ 0.001 & k = 24 \end{cases}$$

□

Esercizio 2.7 (A.A. 1998/99). *Definire le operazioni necessarie a realizzare le seguenti richieste di commutazione mediante rispettivamente strutture T-S, S-T, T-S-T: Sistema 10 linee ingresso/uscita, 40 canali PCM per linea.*

a) canale 2 linea 3 $\Rightarrow$ canale 7 linea 8, canale 30 linea 3 $\Rightarrow$ canale 7 linea 4;

b) canale 26 linea 3 $\Rightarrow$ canale 37 linea 3, canale 26 linea 7 $\Rightarrow$ canale 23 linea 3;

Soluzione.
Si adotta la seguente simbologia: n_C, m_L rappresenta il canale n-esimo della linea m-esima; il simbolo $\xrightarrow{x}$ rappresenta una commutazione da parte di una matrice T o S, indicata sopra il simbolo; il simbolo $\overset{x}{\not\rightarrow}$ rappresenta l'impossibilità di eseguire una commutazione, quindi la presenza di una situazione di blocco. Il simbolo $\rightarrow$ senza indicazioni indica l'utilizzo passivo di una struttura T o S, cioé il passaggio attraverso essa senza effettuare cambi.
Le commutazioni richieste vengono eseguite in sequenza, quindi prima si tenta di instaurare la prima connessione e successivamente la seconda. Un eventuale condizione di blocco si verificherà quindi su quest'ultima.
Si tenga presente che le matrici S sono in grado di commutare linee mentre le matrici T sono in grado di scambiare i canali di una data linea; si ha quindi il seguente schema.

Matrice T-S

caso a)

$$2_C, 3_L \xrightarrow{T} 7_C, 3_L \xrightarrow{S} 7_C, 8_L$$

$$30_C, 3_L \overset{T}{\not\rightarrow} 7_C, 3_L$$

caso b)

$$26_C, 3_L \xrightarrow{T} 37_C, 3_L \rightarrow 37_C, 3_L$$

$$26_C, 7_L \xrightarrow{T} 23_C, 7_L \xrightarrow{S} 23_C, 3_L$$

Matrice S-T

caso a)

$$2_C, 3_L \xrightarrow{S} 2_C, 8_L \xrightarrow{T} 7_C, 8_L$$

$$30_C, 3_L \xrightarrow{S} 30_C, 4_L \xrightarrow{T} 7_C, 4_L$$

caso b)

$$26_C, 3_L \rightarrow 26_C, 3_L \xrightarrow{T} 37_C, 3_L$$

$$26_C, 7_L \overset{T}{\not\rightarrow} 26_C, 3_L$$

Matrice T-S-T

caso a)

$$2_C, 3_L \xrightarrow{T} 7_C, 3_L \xrightarrow{S} 7_C, 8_L \rightarrow 7_C, 8_L$$

$$30_C, 3_L \rightarrow 30_C, 3_L \xrightarrow{S} 30_C, 4_L \xrightarrow{T} 7_C, 4_L$$

caso b)

$$26_C, 3_L \xrightarrow{T} 37_C, 3_L \rightarrow 37_C, 3_L \rightarrow 37_C, 3_L$$

$$26_C, 7_L \xrightarrow{T} 23_C, 7_L \xrightarrow{S} 23_C, 3_L \rightarrow 23_C, 3_L$$

□

Esercizio 2.8 (A.A. 1999/00)**.**

- *Dimensionare una rete di connessione T-S-T con 10 ingressi e 80 canali per ingresso in maniera che sia garantita la condizione di non blocco.*
- *Valutare i parametri di costo della struttura ottenuta*
- *Ripetere il progetto in maniera che per un carico convenzionale per linea d'ingresso di 0.8 la probabilità di blocco sia inferiore a* 10^{-6}.

- *Valutare i nuovi parametri di costo*

Soluzione. Per garantire la condizione di non blocco in una matrice T-S-T si deve avere $k = 2n - 1$ canali in uscita da ogni matrice T del primo blocco e in ingresso ad ogni matrice T del terzo blocco. Pertanto $k = 159$.
Il costo di ogni matrice T è misurabile in termini di accesso, che corrisponde a

$$T_a = \frac{125\mu s}{2 \cdot N} = \frac{125\mu s}{2 \cdot 159} = 0.39\mu s$$

La matrice S intermedia ha invece 10 ingressi e 10 uscite; pertanto ha un costo pari a $C = 100$.
In questo caso si procede per passi successivi. Il problema ci dice che $a = 0.8$. Con $k = 159$ non si ha mai la condizione di blocco. È possibile verificare come per $k = 100$ si ottenga $P_B = 9.37 \cdot 10^{-7}$ mentre con $k = 99$ si ottiene $P_B = 1.82 \cdot 10^{-6}$. Si può scegliere quindi un valore di k compreso fra 100 e 158.
Scegliendo $k = 100$ si ottiene il costo minimo per la matrice T, che in questo caso equivale a $T_a = 0.625\mu s$. □

Esercizio 2.9 (A.A. 2000/01).

- *Progettare una struttura S-S-S a costo minimo e non bloccante in grado di interconnettere 800 linee ingresso/uscita. Si valuti il costo risultante ed il guadagno nei confronti di una realizzazione monostadio.*

- *Individuare una situazione di blocco per strutture T-S*

Soluzione. Per progettare una rete di commutazione tristadio a costo minimo si vuole

$$n = \sqrt{\frac{N}{2}} = 20$$

. Pertanto, perché la struttura sia non bloccante, $K = 2n - 1 = 39$. Il costo della struttura non bloccante tristadio è quindi:

$$C_3 = \left(\frac{N}{n}k\right) n2 + k\left(\frac{N}{n}\right)^2 = 124800$$

mentre per una monostadio si averebbe un costo:

$$C_1 = N^2 = 640000$$

Il guadagno in termini di costo con una tristadio è quindi:

$$G = 100\left(1 - \frac{C_3}{C_1}\right) = 80,5\%$$

□

Esercizio 2.10 (A.A. 2002/03 - Nuovo Ordinamento)**.** *Una rete di commutazione T-S-S-S-T collega 80000 canali in ingresso con altrettanti in uscita. Il primo e il quinto stadio sono costituiti da 800 elementi, aventi, rispettivamente, 150 canali in uscita il primo e 150 in ingresso il quinto. Supponendo che:*

- *al secondo e al quarto stadio ci sono (in ognuno) 40 matrici S;*
- *al terzo stadio ci sono 39 matrici S;*
- *la probabilità di occupazione per canale d'ingresso è del 90*

Si calcoli la probabilità di blocco secondo l'approccio di Lee e il costo della struttura data.

Soluzione. Si nota come i tre stadi interni S siano non bloccanti; è pertanto possibile ricondurre la struttura ad una T-S-T per quanto riguarda la probabilità di blocco. Si ha pertanto che p=0.6 e $P_{\text{blocco}} = 4,384 \cdot 10^{-12}$. Per quanto riguarda il costo le matrici T hanno un costo:

$$T_a = \frac{125\mu s}{2 \cdot 150} = 0,417\mu s$$

Mentre le tre matrici S hanno un costo complessivo pari a:

$$C_3 = \left(\frac{N}{n}k\right)n2 + k\left(\frac{N}{n}\right)^2 = 124800$$

□

Esercizio 2.11 (A.A. 2002/03 - Previgente Ordinamento)**.**

a) *Progettare secondo il criterio di Clos una struttura di commutazione a tre stadi T-S-T supponendo 7 ingressi-uscite con 200 canali ciascuno. Si definiscano i fattori di costo per le singole strutture.*

b) *Determinare il valore della probabilità di blocco secondo il criterio di Lee considerando un numero di canali per ogni ingresso alla struttura S pari ad un terzo del valore ottenuto per il punto a) (si arrotondi per eccesso) e un fattore di carico per canale in ingresso alla struttura pari a 0.2.*

c) *Sostituire la struttura monostadio S del punto a) con una struttura a tre stadi a costo minimo. Si valuti la riduzione del costo rispetto alla soluzione monostadio.*

Esercizio 2.12 (A.A. 2003/04 - Previgente Ordinamento)**.**
E' data una struttura di commutazione T-S costituita da 300 linee ingresso/uscita.

a) *Indicare se la struttura è o no bloccante. Nel secondo caso, individuare almeno una condizione di blocco;*

b) *Sostituire, applicando il criterio di Clos, la struttura S con una struttura a tre stadi S a costo minimo;*

c) *Ripetere il punto b) considerando stavolta il criterio di Lee per valutare la probabilità di blocco risultante supponendo di utilizzare blocchi al primo stadio con un numero di uscite pari ad un quarto di quanto trovato in b) (si arrotondi all'intero superiore) per una probabilità di avere una richiesta in ingresso per linea di 0.2*

Esercizio 2.13 (A.A. 2004/05)**.**
Sia data una struttura di commutazione S con 10000 linee di ingresso/uscita.

a) *Si progetti la struttura di commutazione tristadio S-S-S non bloccante a costo minimo, secondo la regola di Clos, e si valuti il guadagno in termini di costo rispetto alla struttura monostadio originale;*

b) *Si consideri che, per un guasto alla struttura di commutazione tristadio progettata al punto precedente, i primi 10 blocchi e gli ultimi 10 blocchi del secondo stadio diventino inutilizzabili. Si valuti la probabilità di blocco secondo l'approccio di Lee, ipotizzando una probabilità di avere una richiesta in ingresso per linea di 0.3.*