Università degli Studi di Firenze,
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Esame di Calcolo Numerico e Statistica — Prova di Statistica
17-7-2002

NOTA BENE: Nel rispondere alle domande teoriche è necessario definire TUTTI i termini introdotti, spiegare le notazioni e indicare CHIARAMENTE i passaggi.

1. (a) Definire il valore atteso di una variabile casuale sia nel caso discreto che nel caso continuo. (b) Definire il valore atteso della somma di due variabili casuali e dimostrare che e' uguale alla somma dei due valori attesi. (c) Definire il valore atteso del prodotto di due variabili casuali e dimostrare che se le variabili sono indipendenti e' uguale al prodotto dei due valori attesi.

2. Le variabili casuali X, Y e Z hanno le seguenti distribuzioni

$$X \sim Bi(n = 4, p = 0.3), \quad Y \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 16), \quad U \sim P(\lambda = 2).$$

Calcolare le probabilita'

$$P(X = 2); \quad P(1 \leq Y); \quad P(U > 0)$$

e gli indici

$$\text{var}(X/4); \quad E(Y^2); \quad \text{var}(U).$$

3. Un'urna contiene due monete M_1 e M_2. M_1 e' regolare (faccia testa e faccia croce) mentre M_2 e' truccata (entrambe le facce sono testa). Si estrae a caso una moneta che viene poi lanciata osservando testa. (a) Qual e' la probabilita' di avere lanciato M_1? (b) Enunciare e dimostrare il teorema utilizzato per risolvere questo problema.

Soluzioni

1. (a) $E(X) = \sum_x xp(x)$ nel caso discreto per x appartenente all'insieme delle modalita' di X. Nel caso continuo si ha invece
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$
nell'ipotesi che $\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx < \infty$.
(b) Si ha (basta il caso discreto)
$$E(X+Y) = \sum_x \sum_y (x+y)p_{XY}(x,y)$$
dove $p_{XY}(x,y)$ e' la funzione di probabilita' congiunta. Sviluppando si ha
$$E(X+Y) = \sum_x xp_X(x) + \sum_y yp_Y(x,y) = E(X) + E(Y).$$
(c) Infine
$$E(XY) = \sum_x \sum_y (xy)p_{XY}(x,y) = \sum_x \sum_y (xy)p_X(x)p_Y(y)$$
per l'indipendenza e quindi risulta $E(XY) = E(X)E(Y)$.

2. Risulta
$$P(X=2) = \binom{4}{2} 0.3^2 0.7^2 = 0.2646;$$
inoltre,
$$P(U > 0) = 1 - P(Z=0) = 1 - \frac{e^{-2}2^0}{0!} = 1 - e^{-2} = 0.864.$$
Infine,
$$P(1 \leq Y) = P\left(\frac{1-2}{4} \leq Z; Z \sim N(0,1)\right) = P(-0.25 \leq Z) = P(Z \leq 0.25) = 0.598$$
dalle tavole. Inoltre, $\text{var}(X/4) = 1/16 \times 4 \times 0.3 \times 0.7 = 0.0525$. $E(Y^2) = \text{var}(Y) + E(Y)^2 = 16 + 4 = 20$. Infine $\text{var}(U) = 2$.

3. (a) Si tratta di calcolare $P(M_1 \mid T)$. Assumendo $P(M_1) = P(M_2) = 0.5$ e $P(T \mid M_1) = 0.5$ e $P(T \mid M_2) = 1$ si ottiene
$$P(M_1 \mid T) = \frac{P(M_1)P(T \mid M_1)}{P(T)} = \frac{0.5 \times 0.5}{0.75} = 1/3.$$

Infatti

$$P(T) = P(M_1)P(T \mid M_1)+P(M_2)P(T \mid M_2) = 0.5\times0.5+0.5\times1 = 0.75.$$

(b) Si e' usato il teorema di Bayes. Il denominatore ha l'espressione indicata perche' $\Omega = \{M_1, M_2\}$ e dunque

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M_1 \cap T \cup M_2 \cap T) = P(M_1 \cap T) + P(M_2 \cap T) \\ &= P(M_1)P(T \mid M_1) + P(M_2)P(T \mid M_2). \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione della normale standardizzata.

z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Esempio. La probabilità $P(Z < 1.23)$ dove $Z \sim N(0,1)$ è 0.8907 all'incrocio della riga **1.2** e della colonna **3**.