Università degli Studi di Firenze

Facolta' di Ingegneria — Facsimile dell'Esame di Statistica — 12-4-2002

NOTA BENE: Nel rispondere alle domande teoriche' e' necessario definire TUTTI i termini introdotti e spiegare le notazioni. Per risolvere i problemi e' necessario spiegare i passaggi.

1. Siano dati due eventi tali che $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Dimostrare che (a) Se A e B sono incompatibili non possono essere indipendenti, (b) se A e B sono indipendenti non possono essere incompatibili.

2. X e Y sono variabili aleatorie con funzione di probabilita' congiunta data dalla tavola seguente

$p(x,y)$	-1	-2
-1	0.3	0.1
1	0.5	0.1

   (a) X e Y sono indipendenti? Perche' sì o perché no?

   (b) Calcolare la varianza di $X - Y$.

3. I cavi impiegati nei PC devono avere resistenze comprese tra 0.12 e 0.14 ohm. La ditta A li produce con resistenze che sono variabili normali con media 0.13 ohm e scarto quadratico medio 0.005 ohm. Qual e' la probabilita' che un cavo scelto a caso tra quelli prodotti dalla ditta A rispetti le specifiche?

Soluzioni

1. Se A e B sono incompatibili $A \cap B = \emptyset$ e $P(A \cap B) = 0$. Per essere indipendenti occorrerebbe che $0 = P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ma questo non puo' essere perche' entrambi hanno probabilita' strettamente positiva. Se A e B sono indipendenti e hanno probabilita' positiva $0 < P(A)P(B) = P(A \cap B)$ e questo implica che $A \cap B \neq \emptyset$, percio' non possono essere incompatibili.

2. (a) X e Y sono indipendenti se $p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$ per ogni (x, y). In questo caso $p_x(x)p_y(y)$ e'

0.32	0.08
0.48	0.12

   e quindi X e Y non sono indipendenti. (b) Un modo e' usare la formula $\text{var}(X) + \text{var}(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$. Un altro e' derivare la funzione di probabilita' di $Z = X - Y$. Le modalita' sono

0	1
2	3

   quindi la media e' $0.1+2\times 0.5+3\times 0.1 = 1.4$ e il momento secondo e' 3. Quindi la varianza e' $3-1.4^2 = 1.04$.

3. Si deve calcolare

   $$P\{0.12 \leq X \leq 0.14; X \sim N(0.13, 0.005^2)\} = P\{(0.12 - 0.13)/0.005 \leq Z \leq (0.14 - 0.13)/0.005\}$$

   dove Z e' normale standard. Quindi si ottiene $P(-2 \leq Z \leq 2) = 2(0.977 - 0.5) = 95.4\%$.