UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE,
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

**Esame di Calcolo Numerico e Statistica — Prova di Statistica**
**GRUPPO A–L 19-4-2002**

*NOTA BENE: Nel rispondere alle domande teoriche è necessario definire TUTTI i termini introdotti e spiegare le notazioni. Per risolvere i problemi è necessario spiegare chiaramente i passaggi.*

1. (a) Definire in generale i concetti di esperimento casuale, esito, spazio campionario, evento. (b) Considerare quindi l'esperimento che consiste in tre lanci consecutivi e indipendenti di una moneta. Costruire lo spazio campionario e definire formalmente l'evento "escono due teste". (c) Calcolare la probabilita' dell'evento "escono due teste" nell'esperimento del punto (b) sapendo che la probabilita' di testa in un lancio e' $p = 1/4$.

2. Due variabili aleatorie $X$ e $Y$ hanno funzione di probabilita' congiunta

| $p(x,y)$ | $y = 1$, | $y = 2$ |
|---|---|---|
| $x = 0$ | 0.07 | 0.03 |
| $x = 1$ | 0.63 | 0.27 |

   (a) Calcolare la funzione di probabilita' della variabile aleatoria condizionata $Y \mid X = 1$; (b) Calcolare la funzione di probabilita' di $Y$. (c) Le due variabili $X$ e $Y$ sono indipendenti? Perche' si' o perche no? (d) Calcolare il coefficiente di correlazione tra $X$ e $Y$.

3. Data la variabile aleatoria $Y$ con funzione di densita'

$$f(y) = \begin{cases} cy^2, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

   (a) Trovare $c$ affinche' $f$ sia una funzione di densita'. (b) Trovare la probabilita' che $1 \leq Y \leq 2$.

**Soluzioni A-L**

1. (a) Un esperimento casuale e' una prova per la quale si conoscono a priori gli esiti possibili, ma e' incerto quale di questi si presentera'. Gli esiti (eventi elementari) $\omega$ sono i possibili risultati dell'esperimento casuale. Lo spazio campionario $\Omega$ e' l'insieme degli esiti $\omega$. Un evento e' un insieme di esiti e quindi e' un sottoinsieme $E \subseteq \Omega$. (b) Lo spazio campionario in questo caso e' e' composto di 8 eventi elementari.

$$\Omega = \{TTT, CTT, TCT, TTC, CCT, CTC, TCC, CCC\}$$

mentre l'evento "escono due teste" e'

$$E = \{CTT, TCT, TTC\}.$$

(c) La probabilita' di $E$ e' la probabilita' di 2 successi (teste) su 3 prove indipendenti ciascuna con probabilita' di successo pari a $p = 1/4$. Quindi e'

$$\binom{3}{2} p^2(1-p) = 3 \times \frac{1}{4^2}\frac{3}{4} = 0.1406.$$

Si puo' anche ragionare come segue:

$$P(E) = P(CTT \cup TCT \cup TTC) = P(CTT) + P(TCT) + P(TTC)$$

(i tre eventi elementari sono incompatibili) e quindi per l'indipendenza dei lanci

$$P(E) = (1-p)p^2 + p(1-p)p + p^2(1-p) = 3p^2(1-p).$$

2. (a) La funzione di probabilita' condizionata e'

| $y$ | 1 | 2 | Totale |
|---|---|---|---|
| $p(y \mid X = 1)$ | 0.7 | 0.3 | 1 |
| | (0.63/0.9) | (0.27/0.9) | |

dove $0.9 = P(X = 1)$. (b) La funzione di probabilita' di $Y$ e' identica:

| $y$ | 1 | 2 | Totale |
|---|---|---|---|
| $p_y(y)$ | 0.7 | 0.3 | 1 |
| | $(0.63 + 0.07)$ | $(0.03 + 0.27)$ | |

(c) Sono indipendenti perche' $p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$ per ogni $x$ e ogni $y$. (d) Dato che sono indipendenti $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ e dunque il coefficiente di correlazione e' zero.

3. (a) Deve essere

$$c \int_0^2 y^2 dy = 1$$

Percio' poiche' l'integrale e' 8/3, $c = 3/8$. (b) La probabilita' e'

$$P(1 \le Y \le 2) = \int_1^2 \frac{3}{8} y^2 dy = \frac{7}{8}.$$

Università degli Studi di Firenze,
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

**Esame di Calcolo Numerico e Statistica — Prova di Statistica**
**GRUPPO M–Z 19-4-2002**

*NOTA BENE: Nel rispondere alle domande teoriche è necessario definire TUTTI i termini introdotti e spiegare le notazioni. Per risolvere i problemi è necessario spiegare chiaramente i passaggi.*

1. (a) Definire in generale i concetti di esperimento casuale, esito, spazio campionario, evento. (b) Considerare quindi l'esperimento che consiste in tre lanci consecutivi e indipendenti di una moneta. Costruire lo spazio campionario e definire formalmente l'evento "esce una croce". (c) Calcolare la probabilita' dell'evento "esce una croce" nell'esperimento del punto (b) sapendo che la probabilita' di croce in un lancio e' $p = 0.4$.

2. Due variabili aleatorie $X$ e $Y$ hanno funzione di probabilita' congiunta

| $p(x,y)$ | $y=1$, | $y=2$ |
|---|---|---|
| $x=0$ | 0.12 | 0.28 |
| $x=1$ | 0.18 | 0.42 |

   (a) Calcolare la funzione di probabilita' della variabile aleatoria condizionata $Y \mid X = 0$; (b) Calcolare la funzione di probabilita' di $Y$. (c) Le due variabili $X$ e $Y$ sono indipendenti? Perche' si' o perche no? (d) Calcolare il coefficiente di correlazione tra $X$ e $Y$.

3. Data la variabile aleatoria $Y$ con funzione di densita'

$$f(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

   (a) Trovare la funzione di ripartizione di $Y$. (b) Trovare la probabilita' che $1/4 \le Y \le 3/4$.

**Soluzioni M-Z**

1. (a) Un esperimento casuale e' una prova per la quale si conoscono a priori gli esiti possibili, ma e' incerto quale di questi si presentera'. Gli esiti (eventi elementari) $\omega$ sono i possibili risultati dell'esperimento casuale. Lo spazio campionario $\Omega$ e' l'insieme degli esiti $\omega$. Un evento e' un insieme di esiti e quindi e' un sottoinsieme $E \subseteq \Omega$. (b) Lo spazio campionario in questo caso e' e' composto di 8 eventi elementari.

$$\Omega = \{TTT, CTT, TCT, TTC, CCT, CTC, TCC, CCC\}$$

mentre l'evento "esce una croce' e'

$$E = \{CTT, TCT, TTC\}.$$

(c) La probabilita' di $E$ e' la probabilita' di 1 successo (croce) su 3 prove indipendenti ciascuna con probabilita' di successo pari a $p = 0.4$. Quindi e'

$$\binom{3}{1} p(1-p)^2 = 3 \times 0.4 \times 0.6^2 = 0.144.$$

Si puo' anche ragionare come segue:

$$P(E) = P(CTT \cup TCT \cup TTC) = P(CTT) + P(TCT) + P(TTC)$$

(i tre eventi elementari sono incompatibili) e quindi per l'indipendenza dei lanci

$$P(E) = p(1-p)^2 + (1-p)p(1-p) + (1-p)^2 p = 3p(1-p)^2.$$

2. (a) La funzione di probabilita' condizionata e'

| $y$ | 1 | 2 | Totale |
|---|---|---|---|
| $p(y \mid X = 0)$ | 0.3 | 0.7 | 1 |
| | (0.12/0.4) | (0.28/0.4) | |

dove $0.4 = P(X = 0)$. (b) La funzione di probabilita' di $Y$ e' identica:

| $y$ | 1 | 2 | Totale |
|---|---|---|---|
| $p_y(y)$ | 0.3 | 0.7 | 1 |
| | $(0.12 + 0.18)$ | $(0.28 + 0.42)$ | |

(c) Sono indipendenti perche' $p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$ per ogni $x$ e ogni $y$. (d) Dato che sono indipendenti $\text{cov}(X, Y) = 0$ e dunque il coefficiente di correlazione e' zero.

3. (a) Deve essere

$$F(y) = \int_0^y rt^2 dt = t^3|_0^y = y^3$$

per $0 < y < 1$. (b) La probabilita' e'

$$P(1/4 \leq Y \leq 3/4) = F(3/4) - F(1/4) = (3/4)^3 - (1/4)^3 = 0.406.$$