Università degli Studi di Firenze,
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Esame di Calcolo Numerico e Statistica — Prova di Statistica
18-6-2002

NOTA BENE: Nel rispondere alle domande teoriche è necessario definire TUTTI i termini introdotti e spiegare le notazioni. Per risolvere i problemi è necessario spiegare chiaramente i passaggi.

1. (a) Definire il concetto di variabile casuale continua e il concetto di funzione di densita'. Quali proprieta' deve soddisfare la funzione di densita'? (b) Definire il concetto di funzione di ripartizione di una variabile casuale continua. Che relazioni esistono tra la funzione di densita' e la funzione di ripartizione? (c) Scrivere la densita' della variabile casuale normale con media 1 e varianza 4 e della variabile esponenziale con media 0.5.

2. Un'urna contiene 9 tessere su ciascuna delle quali sono segnati due numeri come sotto riportato.

0 1	0 1	0 1
1 0	1 0	1 0
1 1	1 1	1 1

Si consideri l'esperimento casuale che consiste nell'estrazione di una tessera dall'urna. (a) Definire le variabili casuali: X = primo numero sulla tessera; Y = secondo numero sulla tessera; trovando la funzione di probabilita' congiunta di X e Y. (b) Trovare le distribuzioni di probabilita' marginali di X e Y. (c) Trovare la covarianza tra X e Y. (d) Come dovrebbero essere le tessere nell'urna per rendere indipendenti le variabili X e Y? (Trovare la distribuzione teorica in caso di indipendenza).

3. Tre macchine producono lo stesso tipo di pezzi. La prima ne produce 150 al giorno, dei quali il 2% e' difettoso, la seconda ne produce 400, dei quali il 5% e' difettoso e infine la terza ne produce 50, nessuno dei quali e' difettoso. Indicare con A l'evento che un pezzo estratto a caso dalla produzione del giorno sia difettoso, e con B_i l'evento che un pezzo estratto a caso dalla produzione del giorno sia stato prodotto dalla macchina i con $i = 1, 2, 3$. (a) Trovare le probabilita' $P(B_i)$ per $i = 1, 2, 3$. (b) Trovare la probabilita' $P(A)$. (c) Trovare la probabilita' $P(B_2 \mid A)$.

Soluzioni

1. Una v.c. continua e' una variabile casuale per cui esiste una funzione $f(x)$ non negativa tale che per ogni valore reale x

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Tale funzione si dice funzione di densita' di probabilita'. Le proprieta' principali sono che $f(x) \geq 0$ e che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

La funzione di ripartizione e' una funzione $F(x)$ definita per ogni reale x come

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Per la relazione precedente risulta

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x).$$

Un'altra relazione importante e' che

$$F(b) - F(a) = P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

2. La funzione di probabilita' congiunta e le marginali sono

x \ y	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Evidentemente $E(XY) = 1/3$ e $E(X) = E(Y) = 2/3$, quindi $\text{cov}(X, Y) = 1/3 - 4/9 = -1/9$. Non sono percio' indipendenti. Per rendere indipendenti Xe Y le tessere dovrebbero essere

0 0	0 1	0 1
1 0	1 0	1 1
1 1	1 1	1 1

3. Risulta $P(B_1) = 150/600 = 0.25$, $P(B_2) = 400/600 = 0.67$, $P(B_3)50/600 = 1/12 = 0.083$. Inoltre,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3) \\ &= 3/150 \times 0.25 + 20/400 \times 2/3 + 0 \times 1/12 = 23/600 = 0.0383. \end{aligned}$$

Infine

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \mid B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{2/3 \times 0.05}{0.0383} = 0.87.$$