

**Esame di Calcolo Numerico e Statistica — Prova di Statistica
18-9-2002**

NOTA BENE: Nel rispondere alle domande è necessario definire TUTTI i termini introdotti, spiegare le notazioni e indicare CHIARAMENTE i passaggi.

1. (a) Elencare gli assiomi del calcolo delle probabilità.
(b) Siano A e B eventi con $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
Determinare
 - la probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi;
 - la probabilità che non si verifichi A ;
 - la probabilità che non si verifichino né A né B ;
 - la probabilità che si verifichi A e non si verifichi B ;
 - la probabilità che si verifichi B sapendo che si è verificato A .
2. Tre macchine M_1 , M_2 e M_3 producono rispettivamente il 50%, il 30% e il 20% del numero totale di pezzi prodotti da una fabbrica. Le percentuali di pezzi difettosi di queste macchine sono, rispettivamente, il 3%, il 4% e il 5%.
(a) Viene estratto un pezzo a caso: determinare la probabilità che esso sia difettoso.
(b) Supponiamo di estrarre a caso e che il pezzo sia difettoso. Si determini la probabilità che quel pezzo sia stato prodotto dalla macchina M_1 .
3. Supponiamo che la durata X di un dispositivo si possa considerare una variabile aleatoria Normale con parametri $\mu = 100$ ore e $\sigma = 12$ ore. Determinare:
(a) la probabilità che la durata sia superiore a 130 ore;
(b) la probabilità che la durata sia compresa tra 85 e 130 ore.
(c) È vero che la probabilità (a) è uguale a $1 - F_Z(2)$, dove $F_Z(z)$ è la funzione di ripartizione della normale standard? Giustificare la risposta.

Soluzioni

1. (a) Vedi libro. (b) Risulta:

- $P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.
- $P(A^c) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.
- $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.
- $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}$.
- $P(B | A) = P(A \cap B) / P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$.

2. (a) Se D e' l'evento 'pezzo difettoso',

$$P(D) = \sum_{i=1}^3 P(M_i)P(D | M_i) = 0.5 \times 0.03 + 0.3 \times 0.04 + 0.2 \times 0.05 = 0.037.$$

(b) Per la formula di Bayes,

$$P(M_1 | D) = \frac{P(D | M_1)P(M_1)}{P(D)} = \frac{0.5 \times 0.03}{0.037} = \frac{15}{37}.$$

3. (a) $P(X > 130) = P\{Z > (130 - 100)/12\} = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z \leq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$. (Z e' una normal standard).

(b) $P(85 < X < 130) = P\{(85 - 130)/12 < Z < (130 - 100)/12\} = P(-1.25 < Z < 2.5) = P(Z < 2.5) - P(-1.25) = P(Z < 2.5) - [1 - P(Z < 1.25)] = 0.9938 - (1 - 0.8944) = 0.8882$.

(c) No perche' e' $1 - F_Z(2.5)$.

Funzione di ripartizione della normale standardizzata.

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7703 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |

Esempio. La probabilità $P(Z < 1.23)$ dove $Z \sim N(0,1)$ è 0.8907 all'incrocio della riga **1.2** e della colonna **3**.