Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica — Facsimile dell'Esame di Statistica

9-4-2003

NOTA BENE: Nel rispondere alle domande teoriche' e' necessario definire TUTTI i termini introdotti e spiegare le notazioni. Per risolvere i problemi e' necessario spiegare i passaggi.

1. Un'urna contiene M palline di cui K sono bianche. (a) Estraendo con reimmissione, qual e' la probabilita' che la pallina bianca appaia per la prima volta alla quinta estrazione? (b) Mediamente quante estrazioni sono necessarie per osservare pallina bianca? (c) Definire la variabile aleatoria Binomiale.

2. La variabile doppia (X, Y) e' definita dalla funzione di probabilita'

	X		
Y	-1	0	1
0	0.25	0.0	0.25
1	0.00	0.5	0.00

(a) Calcolare la varianza di $X+Y$ e la varianza di $X-Y$. (b) X e Y sono indipendenti? Giustificare.

3. I cavi impiegati nei PC devono avere resistenze comprese tra 0.12 e 0.14 ohm. La ACME li produce con resistenze che sono variabili normali con media 0.13 ohm e scarto quadratico medio 0.005 ohm. (a) Qual e' la probabilita' che un cavo scelto a caso tra quelli prodotti dalla ACME rispetti le specifiche? (b) Trovare il quantile di ordine 0.7 della distribuzione delle resistenze.

Funzione di ripartizione della normale standardizzata.

z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Esempio. La probabilità $P(Z < 1.23)$ dove $Z \sim N(0,1)$ è 0.8907 all'incrocio della riga **1.2** e della colonna **3**.

Soluzioni

1. (a) $p = K/M$. Se X = numero di lanci fino a ottenere 1 bianca, $P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$. Quindi la probabilita' cercata e'

$$P(X = 5) = (1 - K/M)^4 K/M = (M - K)^4 K/M^5.$$

(b) La media e' $1/p = M/K$.

(c) Vedi libro.

2. Si verifica che $E(X) = 0$ e $E(Y) = \frac{1}{2}$. Inoltre $\text{var}(X) = E(X^2) = 1 \times 0.25 + 1 \times 0.25 = \frac{1}{2}$ e $\text{var}(Y) = 1/2(1 - 1/2) = 1/4$ (e' Bernoulli). Quindi e' noto che

$$\text{var}(X \pm Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) \pm 2\text{cov}(X, Y).$$

La covarianza e' $E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY)$. Quindi per calcolo diretto si verifica che $E(XY) = 0$ e dunque X e Y sono incorrelate. Pertanto

$$\text{var}(X \pm Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(b) X e Y sono incorrelati ma non indipendenti. Infatti non e' vero che $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ per ogni x, y (basta un controesempio).

3. (a) Si deve calcolare

$$P\{0.12 \le X \le 0.14; X \sim N(0.13, 0.005^2)\} = P\left\{\frac{0.12 - 0.13}{0.005} \le Z \le \frac{0.14 - 0.13}{0.005}\right\}$$

dove Z e' normale standard. Quindi si ottiene $P(-2 \le Z \le 2) = 2(0.977 - 0.5) = 95.4\%$.

(b) Il quantile di ordine 0.7 della normale standard e' 0.525. Percio' il quantile della distribuzione e' $\mu + \sigma \times 0.525 = 0.13 + 0.005 \times 0.525 = 0.1236$.