UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE, CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

Esame di Calcolo Numerico e Statistica

Prova di Statistica — 22-4-2004

NOTA BENE: Nel rispondere alle domande e' necessario definire i termini introdotti, spiegare le notazioni e fornire i passaggi.

1. Sia data la variabile aleatoria doppia X,Y con funzione congiunta di probabilita' $p(x,y)$:

	y		
x	-1	0	1
2	0.2	0.3	0.1
3	0.1	0.1	0.2

   (a) Calcolare la varianza di Y. (b) Calcolare la varianza di $X-Y$. (c) Verificare se le due variabili sono indipendenti.

2. Una variabile aleatoria continua ha densita' di probabilita'

$$f(x) = \begin{cases} kx/3 & \text{per } x \in [1,2] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

   (a) Determinare il valore di k affinche' la densita' sia ben definita. (b) Calcolare la probabilita' che $1.2 < X < 1.8$. (c) Calcolare la media $E(X)$.

3. (a) Definire una variabile aleatoria discreta. (b) Definire le variabili Binomiale(n,p) e Geometrica(p) indicando anche per ciascuna il tipico esperimento a cui sono associate. (c) Definire una variabile aleatoria continua, spiegare cosa si intende per funzione di densita' di probabilita' e con funzione di ripartizione. Enunciare le relazioni tra i due concetti e le loro proprieta'.

Compito 1.1

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE, CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

Esame di Calcolo Numerico e Statistica

Prova di Statistica — 22-4-2004

NOTA BENE: Nel rispondere alle domande e' necessario definire i termini introdotti, spiegare le notazioni e fornire i passaggi.

1. (a) Definire cosa si intende per variabile aleatoria definita su uno spazio campionario Ω munito di una misura di probabilita' P. (b) Definire la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria e le sue proprieta'. (c) Definire una variabile aleatoria discreta. (d) Definire una variabile aleatoria continua. (e) Definire le variabili aleatorie Esponenziale e Normale.

2. Sia data la variabile aleatoria doppia X,Y con funzione congiunta di probabilita' $p(x,y)$:

		y	
x	1	2	3
-1	0.2	0.4	0.2
1	0.1	0.0	0.1

   (a) Calcolare la media di XY. (b) Calcolare il coefficiente di correlazione tra X e Y. (c) Verificare se le due variabili sono indipendenti.

3. Una variabile aleatoria continua ha funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \leq 0, \\ x^2 & \text{per } x \in (0,1], \\ 1 & \text{per } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

   (a) Trovare la sua funzione di densita'. (b) Calcolare la probabilita' che $1/4 < X$. (c) Calcolare la media $E(X)$.

Compito 1.2

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE, CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

Esame di Calcolo Numerico e Statistica

Prova di Statistica — 22-4-2004

NOTA BENE: Nel rispondere alle domande e' necessario definire i termini introdotti, spiegare le notazioni e fornire i passaggi.

1. Sia data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{per } x \geq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
(a) Dimostrare che f e' una funzione di densita' di probabilita'. (b) Se X e' una variabile aleatoria continua avente f come funzione di densita' trovare la probabilita' $P(1 \leq X \leq 2)$ e il valor medio $E(X)$. (c) Dimostrare che $E(X^2)$ non esiste.

2. Un test basato su una radiografia ai polmoni viene usato per valutare la presenza di tumore. Il test ha una probabilita' di falso negativo $P(Test = negativo|Tumore = Si') = 0.4$ e una probabilita' di falso positivo $P(Test = positivo|Tumore = No) = 0.02$. E' noto che la probabilita' a priori di avere un tumore ai polmoni e' $P(Tumore = Si') = 1/1000$.

   (a) Calcolare la probabilita' $P(Test = positivo|Tumore = Si')$. (b) Calcolare la probabilita' $P(Test = positivo)$ di risultare positivi al test. (c) Calcolare la probabilita' che un individuo risultato postivo al test abbia effettivamente un tumore ai polmoni. (d) Dimostrare in dettaglio i teoremi usati per trovare la soluzione.

3. Supponiamo che stiate considerando l'eventualita' di prendere un lavoro per il quale vi pagano 10 euro all'ora e vi aspettate di lavorare 40 ore a settimana. Tuttavia non e' sicuro che lavoriate esattamente 40 ore e quindi stimate che il numero di ore lavorate a settimana sia una variabile X normale con media 40 e $\sigma = 5$. (a) Calcolare la media del guadagno Y settimanale e la sua deviazione standard. (b) Calcolare la probabilita' che il numero di ore settimanali sia compreso tra 34 e 48.

Compito 2.1

Funzione di ripartizione della normale standardizzata.

z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Esempio. La probabilità $P(Z < 1.23)$ dove $Z \sim N(0,1)$ è 0.8907 all'incrocio della riga **1.2** e della colonna **3**.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE, CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

Esame di Calcolo Numerico e Statistica

Prova di Statistica — 22-4-2004

NOTA BENE: Nel rispondere alle domande e' necessario definire i termini introdotti, spiegare le notazioni e fornire i passaggi.

1. Un medico sa che un certo sintomo E e' causato da tre sole malattie H_1, H_2 e H_3. A priori egli sa che le probabilita' di ciascuna malattia sono

$$P(H_1) = 0.03, \quad P(H_2) = 0.7, \quad P(H_3) = 0.27$$

mentre le probabilita' di questo sintomo data ciacuna malattia sono

$$P(E|H_1) = 0.9, \quad P(E|H_2) = 0.1, \quad P(E|H_3) = 0.3$$

(a) E' possibile calcolare la probabilita' $P(E)$? (b) Se un individuo si presenta dal medico con il sintomo, qual e' la probabilita' che egli abbia la malattia 2? (c) Qual e' la malattia che piu' probabilmente ha causato il sintomo? (d) Dimostrare in dettaglio il teorema fondamentale usato per trovare la soluzione. (e) Perche' la somma delle prime tre probabilita' e' uguale a uno, mentre la somma delle seconde tre probabilita' e' diversa da 1?

2. Sia data la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Dimostrare che F ha le proprieta' di una funzione di ripartizione. (b) Trovare la funzione di densita' corrispondente. (c) Se X e' una variabile aleatoria con funzione di ripartizione $F(x)$, trovare la mediana di X.

3. La variabile aleatoria X rappresenta l'altezza di una persona adulta di sesso maschile. Supponiamo che X abbia distribuzione Normale con parametri $\mu = 176.2$ e $\sigma^2 = 44$. (a) Calcolare la probabilita' che una persona abbia un'altezza compresa tra 170 cm e 185 cm. (b) Calcolare la probabilita' che una persona abbia un'altezza superiore a 1 metro e 90.

Compito 2.2

Funzione di ripartizione della normale standardizzata.

z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Esempio. La probabilità $P(Z < 1.23)$ dove $Z \sim N(0,1)$ è 0.8907 all'incrocio della riga **1.2** e della colonna **3**.